

Filière : Physique
Spécialité : Physique Théorique
Epreuve de spécialité : Théorie des Champs

Concours pour l'accès à la Formation de Doctorat 3^{ème} Cycle
(Sujet No : 2)

Exercice n° 1 : (7 pts)

On donne la densité lagrangienne d'un champ $\psi(x)$ classique de Dirac par :

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

1. Dans un espace temps de dimension n , quelle est la dimension du champ $\psi(x)$?
2. Déterminer la densité hamiltonienne correspondante $\mathcal{H}_D(x)$ en terme de $\psi(x)$ et $\psi^\dagger(x)$.
3. On associe alors aux champs classiques $\psi(x)$ et $\psi^\dagger(x)$ les opérateurs champs $\hat{\psi}(x)$ et $\hat{\psi}^\dagger(x)$ assujettis aux conditions fermioniques de quantification canonique suivantes :

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\vec{y}, t)\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{y}, t)\} = 0$$

- (a) Établir l'expression de l'opérateur Hamiltonien $\hat{H}$ en termes des opérateurs champs $\hat{\psi}(x)$ et $\hat{\psi}^\dagger(x)$.
 - (b) En appliquant l'équation d'Heisenberg $i\partial_0 \hat{A} = [\hat{A}, \hat{H}]$, déterminer l'équation de mouvement de l'opérateur $\hat{\psi}(x)$.
4. On donne le développement en ondes planes de l'opérateur $\hat{\psi}(x)$ sous la forme :

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_s \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}} \left(\hat{b}(p, s) u(p, s) e^{-ip \cdot x} + \hat{d}^\dagger(p, s) v(p, s) e^{ip \cdot x} \right)$$

où $E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Établir l'expression de la forme normale de l'opérateur Hamiltonien $\hat{H}$ en termes des opérateurs $\hat{b}$, $\hat{d}$ et de leur conjugués hermitiens $\hat{b}^\dagger$, $\hat{d}^\dagger$.

• Rappel

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

$$\{\hat{b}(p, s), \hat{b}^\dagger(p', s')\} = \{\hat{d}(p, s), \hat{d}^\dagger(p', s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$\hat{b}(p, s)|0\rangle = \hat{d}(p, s)|0\rangle = 0 \quad \forall p, s, \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

$$u^\dagger(p, s') u(p, s) = v^\dagger(p, s') v(p, s) = \frac{E_{\vec{p}}}{m} \delta_{ss'}, \quad \int \frac{d\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{\pm i(\vec{p}-\vec{q}) \cdot \vec{x}} = \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

$$u^\dagger(-p, s') v(p, s) = v^\dagger(-p, s') u(p, s) = 0 \quad \text{où : } -p \equiv (p^0, -\vec{p})$$

Exercice n° 2 : (6 pts)

- A) On considère la densité lagrangienne du champ vectoriel électromagnétique A^μ classique sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \xi (\partial_\alpha A^\alpha)$$

avec : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et ξ étant une constante réelle non nulle.

Cette densité lagrangienne est-elle invariante sous l'effet des transformations de jauge suivantes :

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x)$$

où $\lambda(x)$ est une fonction scalaire réelle donnée ?

B) Mettre la densité lagrangienne $\mathcal{L}_{EM}$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2} A^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(x) A^\nu$$

- Quelle est l'expression de $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x)$?
- En effectuant la correspondance : $\vec{\partial}_\mu \rightarrow -ik_\mu$ et $\vec{\partial}_\mu \rightarrow ik_\mu$, déduire l'expression de $\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$.
- Quelle est la forme générale que peut prendre le tenseur $\mathcal{D}^{-1\alpha\beta}(k)$.
- En utilisant la relation $\mathcal{D}_{\mu\alpha}(k)\mathcal{D}^{-1\alpha\beta}(k) = \delta_\mu^\beta$, trouver en représentation impulsion l'expression du propagateur du champ électromagnétique : $i\mathcal{D}^{-1\alpha\beta}(k)$. En déduire l'expression de ce propagateur en jauge de Feynman : $\xi = 1$.

Exercice n° 3 : (7 pts)

On considère la théorie d'interaction $\hat{\phi}^4$ avec $\hat{\phi}(x)$ étant l'opérateur champ scalaire réel

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^{(+)}(x) + \hat{\phi}^{(-)}(x) = \int d\vec{p} N_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right)$$

Où $N_{\vec{p}}$ est un facteur de normalisation. Et le seul commutateur non nul est : $[\hat{a}_{\vec{q}}, \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger] = \delta^3(\vec{q} - \vec{k})$

Dans cette théorie l'opérateur densité hamiltonienne d'interaction s'écrit en représentation de Dirac sous la forme :

$$\hat{\mathcal{H}}_I^{int}(x) = : \frac{g}{4!} \hat{\phi}^4(x) :$$

On donne aussi la matrice de transition $\hat{S}$ sous la forme suivante :

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \hat{T} \left(\hat{\mathcal{H}}_I^{int}(x_1) \dots \hat{\mathcal{H}}_I^{int}(x_n) \right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{(n)}$$

où $\hat{T}$ est l'opérateur d'ordre chronologique. Et, on considère la transition de l'état initial : $|i\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger |0\rangle$ vers l'état final : $|f\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_4}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_3}^\dagger |0\rangle$,

- Déterminer l'expression du produit normal : $\hat{\phi}^4(x)$ en terme de $\hat{\phi}^{(-)}(x)$ et de $\hat{\phi}^{(+)}(x)$.
- Calculer l'expression de l'amplitude de transition à l'ordre un : $\hat{S}_{fi}^{(1)} = \langle f | \hat{S}^{(1)} | i \rangle$.